

# Retour sur les résultats de la théorie de la convection forcée laminaire établie en écoulement de couche limite externe 2D

Guillaume Polidori\*, Mourad Rebay, Jacques Padet

Laboratoire de thermomécanique, Utap, faculté des sciences, BP 1039, 51687 Reims, France

(Reçu le 2 février 1998, accepté après révision le 11 septembre 1998)

Abridged English version at the end of the text

**Abstract — Revisited results about the theory of steady laminar forced convection for 2D external boundary layer flows.** This paper is inspired by the observation in the literature that there was a lack of data about the knowledge of semi-analytical solutions of steady thermal state applied to laminar boundary layer flows in the case of forced convection. Thus, we have made a complete analysis and synthesized the results on both the surface temperature and the surface flux problems, from the development of integral and differential methods, in the range  $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$ . Moreover, it has been shown that the same ratio,  $\delta_T/\delta = 20$  traduces the transition between boundary layer and slug flows, whatever the thermophysical considered case. Finally, we present a warning about the use of 2 and 3-order polynomial shapes by Pohlhausen method which induce a non-uniqueness of steady state thermal solutions. © Elsevier, Paris.

**integral method / differential method / laminar boundary layer / forced convection / steady state**

**Résumé — Cet article est né du constat, dans la littérature, de données incomplètes, voire erronées, concernant les solutions semi-analytiques des régimes thermiques établis en convection forcée, plus particulièrement dans le cas des écoulements laminaires de type couche limite. Il nous est apparu alors nécessaire de reconsiderer entièrement le problème et d'établir une synthèse des résultats relatifs aux problèmes, tant à température qu'à flux imposés, obtenus par voies différentielle et intégrale sur la plage  $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$ . De plus, nous montrons par la méthode intégrale que, quel que soit le problème thermophysique considéré, c'est pour une même valeur  $\delta_T/\delta = 20$  qu'apparaît la transition entre écoulement de type couche limite et écoulement pariétal cisaillé. Enfin, nous mettons en garde contre l'emploi des ordres polynomiaux 2 et 3 par la méthode de Pohlhausen, qui induisent une non-unicité des solutions de régime thermique établi. © Elsevier, Paris.**

**méthode intégrale / méthode différentielle / couche limite laminaire / convection forcée / régime établi**

## Nomenclature

$a_f$	diffusivité thermique du fluide.....	$m^2 \cdot s^{-1}$
$Nu_x$	nombre de Nusselt local $(Nu_x = \frac{\Phi_p x}{\lambda_f \Theta_p})$	
$Pr$	nombre de Prandtl	
$Re_x$	nombre de Reynolds local $(Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu})$	
$St$	nombre de Stanton $(St = \frac{Nu_x}{Re_x Pr})$	
$U, V$	composantes de la vitesse.....	$m \cdot s^{-1}$

$U_\infty$	vitesse de l'écoulement libre.....	$m \cdot s^{-1}$
$x, y$	variables spatiales .....	m
<i>Symboles grecs</i>		
$\delta$	épaisseur de la couche limite dynamique	m
$\delta_T$	épaisseur de la couche limite thermique	m
$\lambda_f$	conductivité thermique du fluide .....	$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
$\psi$	fonction de courant.....	m
$\nu$	viscosité cinématique .....	$m^2 \cdot s^{-1}$
$\Theta$	température au sein de la couche limite thermique ( $\theta = T - T_\infty$ ) .....	K
$\Theta_{imp}$	température pariétale imposée $(\theta_{imp} = T_{imp} - T_\infty)$ .....	K
$\Theta_p$	température pariétale ( $\theta_p = T_p - T_\infty$ )	K
$\Phi_p$	densité de flux pariétal .....	$W \cdot m^{-2}$
$\Phi_{imp}$	densité de flux pariétal imposée .....	$W \cdot m^{-2}$

\* Correspondance et tirés à part.

*Indices et exposants*

f	fluide
p	paroi
imp	imposé
T	thermique

**1. INTRODUCTION**

L'étude théorique des écoulements laminaires de type couche limite sur une plaque plane en convection forcée, tant à flux qu'à température pariétale imposés, a, sans conteste, été l'une des plus abordées dans la littérature traitant des problèmes thermoconvectifs en régime établi. Les premiers travaux sont attribués à Pohlhausen [1] qui, à partir des résultats de Blasius [2], a étudié le problème thermoconvectif à température de paroi imposée par méthode différentielle, sur la gamme  $0,6 \leq Pr \leq 15,0$ . Complétés depuis, aussi bien par méthode différentielle que par méthode intégrale, et étendus au problème à flux de paroi imposé, ces travaux sont unanimes pour définir, sous l'hypothèse de non-thermodépendance des propriétés du fluide, les solutions du régime thermique établi sous les formes semi-analytiques suivantes :

- problème à flux pariétal  $\Phi_{\text{imp}}$  imposé :

$$\Theta_p(x) = \frac{\Phi_{\text{imp}}}{\lambda_f k Pr^n} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad (1)$$

- problème à température pariétale  $\Theta_{\text{imp}}$  imposée :

$$\Phi_p(x) = \lambda_f k Pr^n \Theta_{\text{imp}} \frac{\sqrt{Re_x}}{x} \quad (2)$$

L'étude proposée est principalement consacrée à la détermination du paramètre  $k Pr^n$  qui apparaît dans les équations (1) et (2), et qui, dépendant de la faculté intrinsèque du fluide à conduire la chaleur, ne peut être déterminé, quelle que soit la démarche théorique retenue, que par voie numérique. Dans la littérature, les auteurs expriment communément ce paramètre sous la forme de lois de régression, acceptables sur des plages données de nombre de Prandtl, une fois déterminée la valeur de l'exposant  $n$ .

Depuis ces dernières décennies, l'accent est mis principalement sur l'étude des régimes thermoconvectifs en régime instationnaire [3, 4]. Aussi, l'intérêt que nous portons à une parfaite connaissance des solutions de régime établi (1) et (2) est lié au fait qu'elles constituent les solutions asymptotiques des régimes transitoires : solution initiale pour les problèmes instationnaires de refroidissement et solution finale pour ceux de chauffage.

Un examen attentif montre que ces valeurs mentionnées du terme  $k Pr^n$  s'avèrent bien souvent incomplètes, voire, comme nous le montrerons plus loin,

erronées (un rappel des données bibliographiques sera établi plus loin dans l'exposé). En particulier, le cas à flux pariétal imposé apparaît comme peu traité. Qui plus est, admis au fil des parutions d'ouvrages de synthèse, il semble que ces résultats n'aient jamais été rediscutés.

Partant de ce constat, notre objectif est de fournir des conclusions de synthèse en dressant, en premier lieu, un tableau le plus complet possible des variations du paramètre  $k Pr^n$  en fonction de  $Pr$ , tant par méthode intégrale à l'ordre 4 (les raisons du choix de cet ordre polynomial seront discutées ultérieurement) que par méthode différentielle. Pour ce faire, nous avons repris à la base les principes des deux méthodes. Conscients que la majorité des fluides usuels ont un nombre de Prandtl compris entre 0,7 et 20,0, et qu'à notre connaissance il n'en existe pas ayant un nombre de Prandtl compris entre 0,02 et 0,6, nous avons néanmoins considéré comme cadre de l'étude l'ensemble de la plage  $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$ , qui couvre aussi bien les métaux liquides que les huiles lourdes. De ce tableau de résultats, ont ensuite été déduites des lois de régression du paramètre  $k Pr^n$  en fonction de  $Pr$  ; si nous confirmions certaines données de la littérature en précisant plus en détail leur domaine d'application, d'autres sont cependant infirmées.

Deux compléments à cette étude ont été ajoutés : ils concernent la méthode intégrale. Le premier a trait aux écoulements pariétaux cisaillés. Constituant un cas particulier des écoulements de type couche limite, ils présentent l'avantage, lors de leur résolution théorique, d'admettre une solution purement analytique. Aussi, une analyse comparative entre ces deux types d'écoulement permet de définir la valeur du rapport  $\frac{\delta_T}{\delta}$  au-delà duquel un écoulement de type couche limite se comporte comme un écoulement pariétal cisaillé.

Le second complément concerne le choix de l'ordre polynomial de la méthode de Pohlhausen. Si notre démarche théorique repose sur l'emploi de l'ordre 4, nous nous sommes néanmoins intéressés aux ordres inférieurs 2 et 3. Sur la base de considérations mathématiques, nous mettons en garde contre l'emploi des ordres 2 et 3.

**2. RÉSOLUTION PAR MÉTHODE DIFFÉRENTIELLE****2.1. Problème dynamique**

En introduisant le changement de variables  $\eta = \frac{\sqrt{Re_x}}{x} y$  dans les équations de bilan en régime stationnaire 2D de type couche limite laminaire en convection forcée [6], l'équation de quantité de mouvement s'écrit :

$$F''' + \frac{1}{2} FF'' = 0 \quad (3)$$

avec, pour conditions aux limites :

$$\begin{cases} y = 0, U = 0 \Rightarrow F(\eta = 0) = F'(\eta = 0) = 0 \\ y = \infty, U = U_\infty \Rightarrow F'(\eta = \infty) = 1 \end{cases}$$

L'équation différentielle (3), dite de Blasius, admet des solutions affines sous la forme

$$F'(\eta) = \frac{U}{U_\infty}$$

En supposant que le problème thermique admet lui aussi des solutions affines, la démarche consiste à rechercher la température sous la forme

$$\Theta^*(\eta) = \frac{\Theta}{\Theta_p}$$

## 2.2. Problème à température imposée

En exprimant les dérivées de  $\Theta^*(\eta)$ , et après report dans l'équation de l'énergie [6], on obtient l'équation différentielle traduisant le problème thermoconvectif à température imposée :

$$\frac{1}{Pr} \Theta''' + \frac{1}{2} F \Theta'' = 0 \quad (4)$$

Les conditions aux limites thermiques du problème sont :

$$\begin{cases} y = 0, \Theta = \Theta_p \Rightarrow \Theta^*(\eta = 0) = 1 \\ y = \infty, \Theta = \Theta_\infty \Rightarrow \Theta^*(\eta = \infty) = 0 \\ y = \infty, \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 \Rightarrow \Theta''(\eta = \infty) = 0 \end{cases}$$

Les solutions obtenues sont alors de la forme

$$\Phi_p = -\lambda_f \Theta''(\eta = 0) \Theta_{imp} \frac{\sqrt{Re_x}}{x} \quad (5)$$

## 2.3. Problème à flux imposé

En conservant la même forme adimensionnée pour  $\Theta^*(\eta)$ , les solutions sont affines si et seulement si :

$$\begin{cases} \Theta = G(\eta) \frac{\Phi_{imp}}{\lambda_f} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \\ \Theta_p = G(\eta = 0) \frac{\Phi_{imp}}{\lambda_f} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \end{cases}$$

Le calcul des dérivées à partir des expressions précédentes aboutit, après report dans l'équation de l'énergie [6], à l'équation différentielle en  $G$  :

$$\frac{1}{Pr} G'' - \frac{1}{2} F' G + \frac{1}{2} G' F = 0 \quad (6)$$

Cette équation vérifie les conditions aux limites :

$$\begin{cases} G'(\eta = 0) = -1 \\ G(\eta = \infty) = 0 \\ G'(\eta = \infty) = 0 \end{cases}$$

En adoptant un maillage fin,  $\Delta\eta = 0,01$ , la résolution numérique de l'équation de Blasius (3) est obtenue par la méthode de Runge-Kutta au 4<sup>e</sup> ordre, et celle des équations de la thermique (4) et (6) par un schéma implicite aux différences finies.

## 3. RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE INTÉGRALE DE KARMAN-POHLHAUSEN

### 3.1 Profils de vitesse et de température par la méthode de Pohlhausen à l'ordre 4

La méthode de Pohlhausen consiste en une décomposition polynomiale des champs respectifs de température au sein de la couche limite thermique, et de vitesse au sein de la couche limite dynamique. Moyennant des conditions aux limites adéquates [6], on obtient, à l'ordre 4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = U_\infty \left( 2 \frac{y}{\delta} - 2 \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4} \right) \end{array} \right. \quad (7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta = \Theta_p \left( 1 - 2 \frac{y}{\delta_T} + 2 \frac{y^3}{\delta_T^3} - \frac{y^4}{\delta_T^4} \right) \end{array} \right. \quad (7b)$$

### 3.2. Épaisseurs des couches limites thermique et dynamique

L'expression de la couche limite thermique se déduit de la condition d'application d'un flux ou d'une température à la paroi, à savoir :

$$\left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\Phi_p}{\lambda_f} \quad (8)$$

En reportant dans (8) l'expression du champ des températures (7b), on obtient :

$$\delta_T = 2 \frac{\lambda_f}{\Phi_p} \Theta_p \quad (9)$$

L'expression de l'épaisseur de couche limite dynamique se déduit de l'équation de Karman [5] où le champ des vitesses est donné par la méthode de Pohlhausen (7a).

En posant, à l'ordre  $i$ ,  $\delta = \zeta_i \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$ , on obtient, à l'ordre 4 :  $\zeta_4 = 6 \sqrt{\frac{35}{37}} (\approx 5,83)$ .

Ce faisant, en reportant dans (9) l'expression initiale (1) de  $\Theta_p$ , on définit le rapport des épaisseurs des deux couches limites par :

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{2}{\zeta_4 k Pr^n} \quad (10)$$

La méthode de Karman-Pohlhausen repose sur la formulation intégrale de l'équation énergétique au sein de la couche limite thermique. Aussi, une des caractéristiques fondamentales du principe intégral repose sur la considération des positions respectives des deux couches limites thermique et dynamique, induisant de fait une distinction, selon que l'épaisseur de la couche limite thermique est supérieure ou inférieure à la couche limite dynamique.

### 3.3. Cas où $\delta_T \leq \delta$

Dans ce cas l'équation intégro-différentielle de l'énergie a pour expression :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} \Theta U dy = -a_f \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (11)$$

Cette équation est résolue en reportant les expressions (7b) pour  $\Theta$  et (1) pour  $\Theta_p$ . Il apparaît clairement dans (1) et (2) que le paramètre  $k Pr^n$  est équivalent au rapport  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$ . Par commodité, et pour rester cohérent avec la formulation adoptée par plusieurs auteurs, nous poserons :

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = k Pr^n \quad (12)$$

*Remarque.* S'il est commode d'exprimer, dans la relation (12), le paramètre  $k Pr^n$  sous la forme d'un groupement adimensionnel, il n'en demeure pas moins que cette formulation est physiquement sujette à ambiguïté. En effet, Padet [5] met en garde contre l'emploi du nombre de Nusselt, qui n'est pas un critère de similitude, comme l'est le nombre de Reynolds. Il serait préférable d'exprimer le paramètre  $k Pr^n$  sous la forme d'un groupement adimensionnel traduisant des critères de similitude. Aussi, l'introduction du nombre de Stanton paraît souhaitable. Une écriture physiquement plus logique du paramètre  $k Pr^n$  serait :

$$St \sqrt{Re_x} Pr = k Pr^n$$

Nous adopterons néanmoins la formulation (12) dans le seul but de rendre plus aisées les comparaisons avec les travaux antérieurs.

#### 3.3.1. Flux pariétal imposé

La résolution de l'équation (11), après report de l'expression (1) de  $\Theta_p$ , conduit à la formulation polynomiale :

$$\left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^6 - Pr \left[ \frac{8}{15 \zeta_4} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^3 - \frac{12}{35 \zeta_4^3} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right) + \frac{8}{45 \zeta_4^4} \right] = 0 \quad (13)$$

En reportant l'expression (10) du rapport des deux couches limites dans l'équation (13), on trouve que  $\frac{\delta_T}{\delta} = 1$  correspond à  $Pr = 0,5$  ;  $\frac{\delta_T}{\delta} \leq 1$  est donc vérifiée pour  $Pr \geq 0,5$  (on trouve parfois [6]  $Pr \geq 0,6$  pour ce cas).

#### 3.3.2. Température pariétale imposée

De la même manière que précédemment, mais en reportant l'expression (2) de  $\Phi_p$  dans l'équation (11), on obtient :

$$\left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^6 - \frac{Pr}{2} \left[ \frac{8}{15 \zeta_4} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^3 - \frac{12}{35 \zeta_4^3} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right) + \frac{8}{45 \zeta_4^4} \right] = 0 \quad (14)$$

En adoptant la même démarche que précédemment, on trouve que le domaine de validité de cette équation correspond à la plage  $Pr \geq 1,0$ , ce qui est conforme avec les données de la littérature.

### 3.4. Cas où $\delta_T \geq \delta$

Dans ce cas, l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^\delta \Theta U dy + U_\infty \int_\delta^{\delta_T} \Theta dy \right] = -a_f \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (15)$$

#### 3.4.1 Flux pariétal imposé

L'équation polynomiale ainsi obtenue s'écrit :

$$\left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^5 - \frac{54}{7 \zeta_4} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^4 + \left[ \frac{192}{\zeta_4^3} - \frac{2880}{\zeta_4^5 Pr} \right] \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^2 - \frac{864}{\zeta_4^4} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right) + \frac{1728}{\zeta_4^5} = 0 \quad (16)$$

TABLEAU I / TABLE I								
Récapitulatif des valeurs de $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$ et $\frac{\delta_T}{\delta}$ sur la plage $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$								
Summary of $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$ and $\frac{\delta_T}{\delta}$ values in the range $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$ .								
	Flux imposé				Température imposée			
	Méthode différentielle		Karman-Pohlhausen		Méthode différentielle		Karman-Pohlhausen	
Pr	$\frac{Nu}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\delta_T}{\delta}$	$\frac{Nu}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\delta_T}{\delta}$	$\frac{Nu}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\delta_T}{\delta}$	$\frac{Nu}{\sqrt{Re_x}}$	$\frac{\delta_T}{\delta}$
0,001	0,025	20,833	0,023	14,294	0,017	23,256	0,017	20,179
0,005	0,056	9,434	0,051	6,726	0,038	13,158	0,037	9,272
0,01	0,077	6,666	0,07	4,900	0,051	7,576	0,051	6,726
0,02	0,105	4,854	0,096	3,573	0,070	5,494	0,070	4,900
0,04	0,140	3,484	0,129	2,659	0,095	3,968	0,096	3,573
0,07	0,175	2,688	0,162	2,117	0,121	3,067	0,122	2,812
0,1	0,200	2,293	0,187	1,834	0,140	2,610	0,141	2,433
0,2	0,260	1,692	0,245	1,400	0,183	1,926	0,187	1,834
0,3	0,301	1,422	0,285	1,204	0,213	1,623	0,219	1,566
0,4	0,333	1,262	0,317	1,082	0,237	1,439	0,245	1,400
0,5	0,361	1,157	0,343	1	0,257	1,317	0,266	1,290
0,6	0,384	1,075	0,366	0,937	0,276	1,222	0,285	1,204
0,7	0,406	1,012	0,387	0,866	0,292	1,151	0,302	1,136
0,8	0,425	0,961	0,406	0,845	0,306	1,092	0,317	1,082
1	0,460	0,884	0,440	0,780	0,331	1	0,343	1
2	0,581	0,686	0,558	0,615	0,420	0,776	0,439	0,781
3	0,666	0,592	0,642	0,534	0,482	0,671	0,506	0,678
5	0,791	0,497	0,764	0,449	0,573	0,562	0,603	0,569
10	1	0,393	0,965	0,355	0,723	0,444	0,764	0,449
20	1,255	0,309	1,219	0,281	0,910	0,352	0,965	0,355
50	1,700	0,228	1,657	0,207	1,232	0,259	1,314	0,261
100	2,150	0,181	2,089	0,164	1,547	0,205	1,657	0,207

On vérifie que l'égalité des deux épaisseurs de couches limites correspond bien à  $Pr = 0,5$ . Ainsi, cette équation est applicable sur l'intervalle  $Pr \leq 0,5$ .

### 3.4.2. Température pariétale imposée

La résolution de l'équation (15) conduit à :

$$\left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^5 - \frac{54}{7\zeta_4} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^4 + \left[ \frac{192}{\zeta_4^3} - \frac{5760}{\zeta_4^5 Pr} \right] \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^2 - \frac{864}{\zeta_4^4} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right) + \frac{1728}{\zeta_4^5} = 0 \quad (17)$$

Le domaine de validité de cette équation correspond à la plage  $Pr \leq 1,0$ .

Toutes les valeurs obtenues du rapport  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  en fonction de  $Pr$ , déduites des équations (13), (14), (16) et (17), sont reportées dans le tableau I.

## 4. ANALYSE COMPARATIVE DES DEUX MÉTHODES

Par analogie avec la méthode intégrale, posons, pour la méthode différentielle,  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1}{G(0)}$  pour le problème à flux imposé et  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} = -\Theta''(0)$  pour le problème à température imposée.

## Retour sur les résultats de la théorie de la convection forcée laminaire

Les résultats obtenus, tant par la méthode intégrale que par la méthode différentielle, sont résumés dans le *tableau I*, sur la plage  $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$ . Il est à noter que le rapport  $\frac{\delta_T}{\delta}$  a également été reporté ; issu de l'équation (10) concernant la méthode intégrale, il a été déterminé par la méthode différentielle à partir de la résolution de l'équation (3) de Blasius, où l'épaisseur de la couche limite dynamique a été trouvée comme étant  $\delta = 4,91 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$ . C'est cette expression que nous avons considérée, et non celle approchée communément adoptée dans la littérature, soit  $\delta \approx 5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$ .

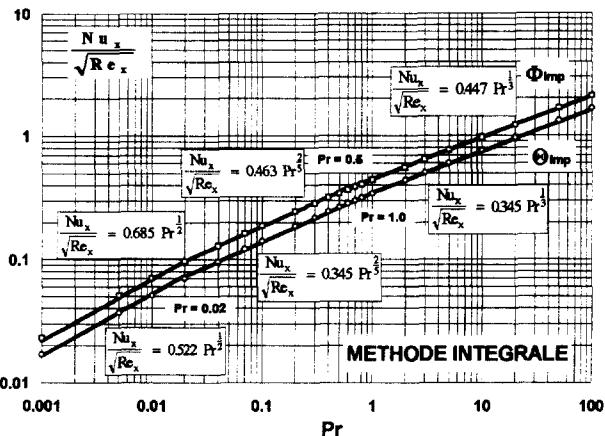
On précisera qu'en ce qui concerne la méthode différentielle, et plus particulièrement le cas à température imposée, nos résultats sont conformes aux premières données de Pohlhausen [1] sur la plage  $0,6 \leq Pr \leq 15$ , puisqu'on enregistre un écart relatif n'excédant pas 0,9 % sur cette plage.

Un examen des valeurs mentionnées dans le *tableau I* montre que, pour le problème thermoconvectif à température imposée, quelle que soit la méthode employée, la condition  $\delta_T = \delta$  est satisfaite pour un même nombre de Prandtl  $Pr = 1,0$ . On notera cependant une légère différence pour le problème à flux imposé quant au respect de cette condition ; elle est donnée pour  $Pr = 0,5$  par la méthode intégrale et pour  $Pr \approx 0,702$  par la méthode différentielle.

De manière à demeurer cohérent avec la formulation de lois de régression mentionnées usuellement dans la littérature, nous avons représenté sur les *figures 1* (méthode intégrale) et *2* (méthode différentielle), les graphes d'évolution du paramètre  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  en fonction de  $Pr$ . Superposées à ces valeurs sont reportées les lois de régression que nous en avons déduites. Sur ces graphes sont également précisées les valeurs de  $Pr$  qui correspondent aux ruptures de pente des graphes.

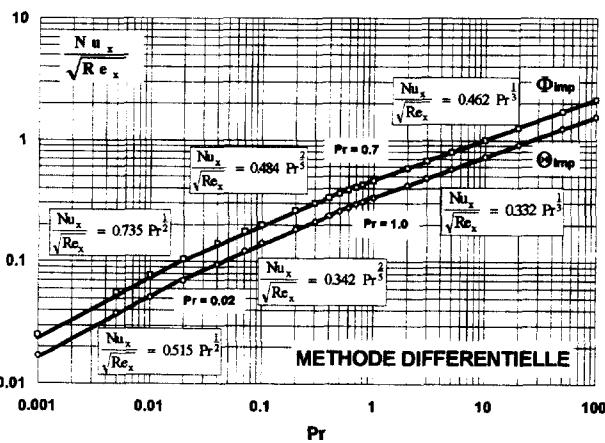
Les graphes obtenus montrent une concordance manifeste entre les résultats des deux approches théoriques (*figures 1* et *2*), l'écart relatif moyen entre eux, sur la plage examinée de nombres de Prandtl, étant de l'ordre de 4,8 %, pour le cas à flux imposé, et de 2,1 %, pour le cas à température imposée.

En outre, on constate que quelles que soient l'approche et la nature du problème thermophysique considérées, les corrélations précisées obéissent identiquement à des lois de régression proportionnelles, par valeurs croissantes de  $Pr$ , à  $Pr^{\frac{1}{2}}$ ,  $Pr^{\frac{2}{3}}$  et  $Pr^{\frac{1}{3}}$ . Il apparaît également que, dans les deux cas, le transfert de chaleur est plus important pour le problème à flux imposé que pour celui à température imposée, l'écart relatif moyen sur la totalité de la plage de  $Pr$  étant de 24 % par la méthode intégrale et de 29 % par la méthode différentielle.



**Figure 1.** Lois d'évolution de  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  en fonction de  $Pr$  par méthode intégrale.

**Figure 1.** Evolution laws of  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  versus  $Pr$  deduced from the integral method.



**Figure 2.** Lois d'évolution de  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  en fonction de  $Pr$  par méthode différentielle.

**Figure 2.** Evolution laws of  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  versus  $Pr$  deduced from the differential method.

## 5. COMPARAISON AVEC LES DONNÉES DE LA LITTÉRATURE

À ce stade de notre étude, nous présentons dans le *tableau II* les lois de régression mentionnées dans la littérature. On précisera que seuls les résultats relatifs à la méthode intégrale développée à l'ordre 4 sont mentionnés (on trouve chez certains auteurs [7, 8]) quelques résultats déduits de l'ordre 3.

TABLEAU II / TABLE II			
Tableau récapitulatif des données de la littérature. Summary table of literature data.			
Problème	Gamme de $Pr$	$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$	Références
Méthode différentielle			
Température imposée	$Pr >> 1$	$0,338 Pr^{\frac{1}{3}}$	Fortier [11], Kakaç et al.[7]
	$0,6 \leq Pr \leq 20$	$0,332 Pr^{\frac{1}{3}}$	Cebeci [8], Darrozes et al. [12], Fortier [11], Kakaç et al. [7], Kays et al. [13], Padet [6], Fortier [11], Kakaç et al.[7], Padet [6]
	$Pr << 1$	$0,564 Pr^{\frac{1}{2}}$	Cebeci et al. [8]
Flux imposé	$10^{-3} \leq Pr \leq 5 \cdot 10^{-3}$	$0,564 Pr^{\frac{1}{2}}$	
	$0,6 \leq Pr \leq 15$	$0,414 Pr^{\frac{1}{3}}$	Darrozes et al. [12], Fortier [11], Padet [6]
Méthode intégrale (ordre 4)			
Température imposée	$0,6 \leq Pr \leq 20$	$0,342 Pr^{\frac{1}{3}}$	Darrozes et al. [12], Fortier [11], Padet [6]
Flux imposé	$Pr >> 1$	$0,414 Pr^{\frac{1}{3}}$	Cebeci et al. [8], Fortier [11]
	$0,6 \leq Pr \leq 20$	$0,431 Pr^{\frac{1}{3}}$	Darrozes et al. [12], Fortier [11], Padet [6]

Il apparaît à la lecture de ce tableau que seul le cas à température imposée résolue par la méthode différentielle semble bien représenté, puisqu'une large plage de nombres de Prandtl est couverte. En revanche, pour les trois autres situations, il n'est fait mention d'aucune donnée pour  $Pr < 0,6$  et pour  $Pr > 20$  (sauf pour le cas à flux imposé, résolu par la méthode intégrale, que nous rediscuterons plus loin). Nous nous proposons ainsi de compléter ces données.

Nous avons mentionné dans le *tableau III* les différentes lois de régression que nous avons trouvées (*figures 1* et *2*) sur l'ensemble de la plage  $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$ . De plus, nous avons reporté les écarts relatifs (lorsque la comparaison était possible) entre nos données et celles de la littérature.

Nous confirmons, quelle que soit la situation considérée, les valeurs données dans la littérature pour l'emploi de fluides usuels ( $0,6 \leq Pr \leq 10^2$ ), exception faite du cas à flux imposé résolu par la méthode différentielle. Pour celui-ci, il est fait mention de l'expression  $0,414 Pr^{\frac{1}{3}}$ , que nous infirmons ; nous proposons la valeur  $0,462 Pr^{\frac{1}{3}}$ . Ce résultat est confirmé par ceux donnés par Sparrow et al. [9] et de Tchao et al. [10], pour un nombre de Prandtl unité, à savoir 0,458 et 0,460. De plus, certains auteurs [8] proposent sur la plage  $10^{-3} \leq Pr \leq 5 \cdot 10^{-3}$  la loi de régression  $0,564 Pr^{\frac{1}{2}}$  pour le problème à température imposée, résolu par la méthode différentielle. Nous proposons l'expression  $0,515 Pr^{\frac{1}{2}}$  qui, outre le fait de présenter une meilleure

approximation sur la plage mentionnée, peut être étendue jusqu'à  $Pr = 0,02$  (cas des métaux liquides tels que le mercure). Par ailleurs, on observe dans la littérature pour le cas à flux imposé traité par la méthode intégrale un découpage pour  $Pr \geq 0,6$  :  $[0,431 Pr^{\frac{1}{3}}, 0,6 \leq Pr \leq 20]$  et  $[0,462 Pr^{\frac{1}{3}}, Pr >> 1]$ . Nous proposons l'expression  $0,447 Pr^{\frac{1}{3}}$ , qui donne de meilleurs résultats sur la plage unique  $Pr \geq 0,5$ .

*Remarque.* On rappellera que si l'étude présentée découle d'une analyse adimensionnée centrée sur les variations du nombre de Prandtl,  $Pr$  n'est cependant pas complètement représentatif d'un fluide. Le retour aux grandeurs dimensionnées fait également intervenir séparément  $\lambda_f$  et  $\nu$ , que l'on retrouve dans les relations (1) et (2).

## 6. EXTENSION DE LA MÉTHODE INTÉGRALE AUX ÉCOULEMENTS PARIÉTAUX CISAILLES

Après avoir étudié les cas où  $\frac{\delta_T}{\delta} \leq 1$  et  $\frac{\delta_T}{\delta} \geq 1$ , nous nous sommes intéressés par la méthode intégrale aux problèmes où  $\delta_T >> \delta$ , que l'on rencontre lorsque  $Pr \rightarrow 0$ , et qui définissent la famille des écoulements pariétaux cisaillés. On les rencontre, en particulier,

TABLEAU III / TABLE III

Lois de régression du rapport  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$   
et plages de nombre de Prandtl correspondantes.

Deduced regressing laws of  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$   
and corresponding Prandtl number range.

Problème	Gamme de $Pr$	$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$	Écart relatif avec les données de la littérature
Méthode différentielle			
Température imposée	$10^{-3} \leq Pr \leq 0,02$	$0,515 Pr^{\frac{1}{2}}$	8,7 %
	$0,02 \leq Pr \leq 1,0$	$0,342 Pr^{\frac{2}{5}}$	-
	$1,0 \leq Pr \leq 100$	$0,332 Pr^{\frac{1}{3}}$	0 %
Flux imposé	$10^{-3} \leq Pr \leq 0,02$	$0,735 Pr^{\frac{1}{2}}$	-
	$0,02 \leq Pr \leq 0,7$	$0,484 Pr^{\frac{2}{5}}$	-
	$0,7 \leq Pr \leq 100$	$0,462 Pr^{\frac{1}{3}}$	11,6 %
Méthode intégrale (ordre 4)			
Température imposée	$10^{-3} \leq Pr \leq 0,02$	$0,522 Pr^{\frac{1}{2}}$	-
	$0,02 \leq Pr \leq 1,0$	$0,345 Pr^{\frac{2}{5}}$	-
	$1,0 \leq Pr \leq 100$	$0,345 Pr^{\frac{1}{3}}$	0,9 %
Flux imposé	$10^{-3} \leq Pr \leq 0,02$	$0,685 Pr^{\frac{1}{2}}$	-
	$0,02 \leq Pr \leq 0,5$	$0,463 Pr^{\frac{2}{5}}$	-
	$0,5 \leq Pr \leq 100$	$0,447 Pr^{\frac{1}{3}}$	3,7 %

dans les écoulements de métaux liquides. Nous nous proposons de compléter l'étude précédente et de l'étendre à ce type d'écoulement, de manière à préciser en deçà de quelle valeur de  $Pr$  (ou à partir de quelle valeur du rapport  $\frac{\delta_T}{\delta}$ ) on peut faire l'hypothèse qu'un écoulement de type couche limite peut être approximé par un écoulement pariétal cisaillé pur. Pour ce faire, nous établissons les équations relatives aux écoulements cisaillés.

Traitons, en premier lieu, le cas où le problème thermoconvectif est à flux pariétal imposé. L'équation intégrale de l'énergie s'écrit sous sa forme la plus simple :

$$U_\infty \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} \Theta dy = -a_f \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (18)$$

La résolution mène à l'équation

$$\frac{d}{dx} (\Theta_p^2) = \frac{5 a_f \Phi_{imp}^2}{3 U_\infty \lambda_f^2}$$

qui admet la formulation purement analytique suivante :

$$\Theta_p = \frac{\Phi_{imp}}{\lambda_f \sqrt{\frac{3}{5} Pr^{\frac{1}{2}}}} \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad (19)$$

Analysons maintenant le cas où le problème thermoconvectif est à température pariétale imposée. La résolution de l'équation intégrale de l'énergie (18) conduit à l'obtention d'une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{d\Phi_p}{dx} + \frac{5 a_f}{3 \lambda_f^2 \Theta_{imp}^2 U_\infty} \Phi_p^3 = 0$$

qui admet pour solution :

$$\Phi_p = \lambda_f \sqrt{\frac{3}{10} Pr^{\frac{1}{2}}} \Theta_{imp} \frac{\sqrt{Re_x}}{x} \quad (20)$$

Le tableau IV illustre la comparaison entre les données relatives aux écoulements de type couche limite lorsque  $Pr \rightarrow 0$ , et aux écoulements pariétaux cisaillés. Pour ce faire, nous avons reporté les termes  $\sqrt{\frac{3}{5} Pr^{\frac{1}{2}}}$  et  $\sqrt{\frac{3}{10} Pr^{\frac{1}{2}}}$  des équations (19) et (20) pour les écoulements cisaillés, ainsi que les résultats  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  des équations (16) et (17) relatives aux écoulements de type couche limite lorsque  $\frac{\delta_T}{\delta} > 1$ , pour les problèmes thermoconvectifs respectivement à flux et température imposés ; nous avons également mentionné les écarts relatifs E(%) correspondants.

On montre, à partir des écarts relatifs indiqués, que pour  $Pr \leq 5 \cdot 10^{-4}$ , ce qui correspond à  $\frac{\delta_T}{\delta} \geq 19,8$ , un écoulement de type couche limite se comporte comme un écoulement pariétal cisaillé, pour le cas à flux imposé. Par ailleurs, on établit que la considération d'un écoulement purement cisaillé est justifiée pour un problème à température imposée lorsque  $Pr \leq 10^{-3}$ , ce qui correspond à un rapport  $\frac{\delta_T}{\delta} \geq 20,2$ .

Ainsi, quel que soit le problème thermophysique considéré, flux pariétal ou température pariétale imposés, il apparaît que la transition écoulement de couche limite/écoulement pariétal cisaillé est atteinte pour  $\frac{\delta_T}{\delta} \approx 20$ .

## 7. MISE EN GARDE CONTRE L'EMPLOI DE LA MÉTHODE DE POHLHAUSEN AUX ORDRES 2 ET 3

Opter pour la méthode de Pohlhausen conduit inéluctablement à la question du choix de l'ordre du

TABLEAU IV / TABLE IV  
Comparaison des résultats relatifs aux écoulements de couche limite  
et rampants lorsque  $Pr \rightarrow 0$ , par la méthode intégrale.

Comparison between boundary layer and slug flow results when  $Pr \rightarrow 0$ ,  
deduced by integral method.

	Pr	0,02	0,01	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$
Flux imposé	$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$ (écoulement de couche limite)	0,096	0,070	0,051	0,023	0,017	0,007
	$\sqrt{\frac{3}{5}} Pr^{\frac{1}{2}}$ (écoulement rampant)	0,109	0,077	0,055	0,024	0,017	0,007
	E (%)	11,9	9,1	7,3	4,2	0	0
Température imposée	$\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$ (écoulement de couche limite)	0,070	0,051	0,037	0,017	0,012	0,005
	$\sqrt{\frac{3}{10}} Pr^{\frac{1}{2}}$ (écoulement rampant)	0,077	0,055	0,039	0,017	0,012	0,005
	E (%)	9,1	7,3	5,1	0	0	0

polynôme retenu. Bien souvent, cet ordre découle d'un compromis entre commodité d'emploi (les calculs sont d'autant plus fastidieux que l'ordre est élevé) et sens physique. Par exemple, l'ordre 2 peut être accepté pour traiter un problème de réchauffement à la condition expresse que  $\delta_T \leq \delta$  (si  $\delta_T > \delta$ , un profil parabolique n'est plus acceptable). Par ailleurs, considérer un problème de relaxation thermique complète induit de fait l'emploi d'un ordre strictement supérieur à 2 pour satisfaire la condition de gradient pariétal de température nul.

Pour s'affranchir de ces considérations, on préfère alors opter pour l'ordre 4, situation implicitement « passe-partout ».

Notre propos concerne le choix de l'ordre polynomial à partir de la cohérence physique des résultats obtenus aux différents ordres. Pour ce faire, nous présentons les résultats en régime établi relatifs aux ordres polynomiaux 2 et 3, et les comparons à l'ordre 4, obtenu précédemment.

#### – Méthode de Pohlhausen à l'ordre 2

$$\left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^4 - Pr \left[ \frac{2}{3\sqrt{30}} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right) - \frac{2}{15^2} \right] = 0 \quad (21)$$

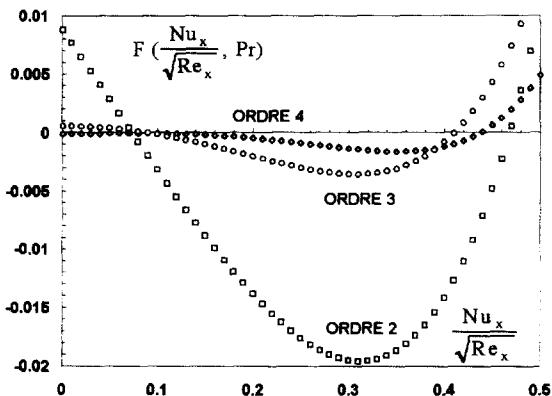
#### – Méthode de Pohlhausen à l'ordre 3

$$\left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^5 - \sqrt{\frac{13}{70}} Pr \left[ \frac{27}{160} \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}} \right)^2 - \frac{3159}{2508,8 \cdot 10^3} \right] = 0 \quad (22)$$

À titre d'exemple, nous traitons uniquement le cas correspondant au problème thermoconvectif à flux imposé lorsque  $\delta_T \leq \delta$ , l'étude des autres cas, i.e.  $\delta_T > \delta$ , et le problème à température imposée ayant conduit aux mêmes conclusions.

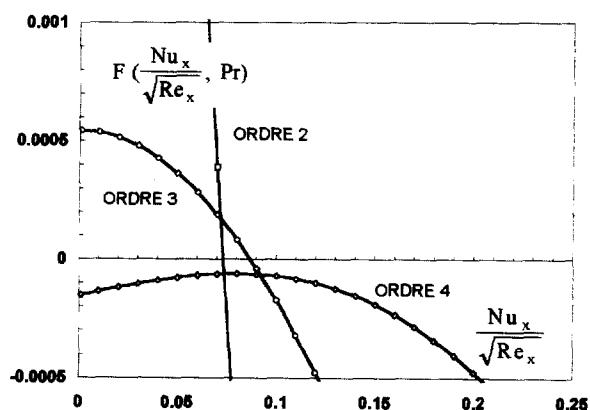
Nous avons, sur la figure 3, tracé les graphes d'évolution des fonctions  $F \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}, Pr \right)$  en fonction de  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$ , pour les ordres polynomiaux 2 (21), 3 (22), 4 (13), et représenté sur la figure 4 ces mêmes graphes, mais avec une échelle beaucoup plus dilatée, et ce, pour un nombre de Prandtl unité.

Il apparaît qu'aux ordres 2 et 3, deux valeurs de  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  satisfont les équations  $F \left( \frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}, Pr \right) = 0$ , alors



**Figure 3.** Courbes d'évolution comparatives de  $F\left(\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}, Pr\right)$  en fonction de  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$  : méthode de Pohlhausen aux ordres 2, 3 et 4 ( $Pr = 1$ ).

**Figure 3.** Comparative graphs  $F\left(\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}, Pr\right)$  versus  $\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}$ : 2, 3 and 4-order Pohlhausen method ( $Pr = 1$ ).



**Figure 4.** Détail de la figure 3.

**Figure 4.** Detail of figure 3.

que l'ordre 4 ne souffre d'aucune ambiguïté quant à l'unicité de la solution du problème en régime permanent.

Ainsi, aux ordres 2 et 3, les deux valeurs obtenues  $\left(\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}\right)_{\min}$  et  $\left(\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}\right)_{\max}$  induisent deux solutions du régime établi, respectivement  $(\Theta_p(x))_{\max}$  et  $(\Theta_p(x))_{\min}$ . On montre que la variation de  $Pr$  n'a au-

cune influence sur la valeur de  $\left(\frac{Nu_x}{\sqrt{Re_x}}\right)_{\min}$ , alors que la seconde racine est logiquement dépendante de  $Pr$ . Bien évidemment, on pourra toujours s'accommoder de cela en disant que le choix parmi ces deux solutions n'est pas arbitraire, et repose sur le fait que le problème physique à la base de l'étude, d'une part, ne peut admettre qu'une solution unique et, d'autre part, est lié à la nature du fluide, ce qui conduit de fait au choix de  $(\Theta_p(x))_{\min}$ .

Néanmoins, il est toujours plus satisfaisant d'adopter une méthodologie mathématique non équivoque ; c'est pourquoi nous préconisons l'emploi de l'ordre 4 par la méthode de Pohlhausen.

## 8. CONCLUSION

L'étude théorique des écoulements de type couche limite sur plaque plane en convection laminaire forcée a été reconSIDérée de manière à fournir des conclusions de synthèse sur les solutions de régime thermique établi sur une plage continue de nombres de Prandtl variant de  $10^{-3}$  à  $10^2$ , après examen, dans la littérature, de données trop disparates voire, pour certaines, manifestement erronées. Les deux problèmes thermophysiques, à température pariétale imposée et à flux imposé, ont été traités.

Les deux approches théoriques retenues, méthode différentielle et méthode intégrale de Karman-Pohlhausen développée au 4<sup>e</sup> ordre, bien qu'intrinsèquement différentes, donnent des résultats très proches sur l'ensemble de la plage de  $Pr$  étudiée ; écart moyen inférieur à 5 % pour le problème à flux imposé, et de l'ordre de 2 % pour le cas à température imposée. Par ailleurs, quelle que soit la méthode théorique retenue, la comparaison du transfert de chaleur pour les deux problèmes thermophysiques est en faveur du problème à flux imposé, l'amélioration étant de 24 % par la méthode intégrale et 29 % par la méthode différentielle.

Une extension de la méthode de Karman-Pohlhausen aux très faibles valeurs de  $Pr$  a été effectuée ; en comparant les résultats obtenus aux solutions analytiques des problèmes thermophysiques en écoulements cisaillés, nous avons trouvé qu'un écoulement de type couche limite se comporte comme un écoulement cisaillé en deçà de  $Pr = 5 \cdot 10^{-4}$  pour le problème à flux imposé, et  $10^{-3}$  pour celui à température imposée. Dans les deux, c'est un même rapport  $\frac{\delta_T}{\delta} = 20$  qui matérialise la transition entre ces deux types d'écoulement.

Enfin, en comparant les résultats relatifs à la méthode de Karman-Pohlhausen aux ordres 2, 3 et 4, on montre que seul l'ordre 4 admet une solution unique du régime permanent, les deux autres ordres fournissant deux solutions distinctes.

## RÉFÉRENCES

- [1] Pohlhausen E., Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung, *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)* 1 (1921) 115-121.
- [2] Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.* 56 (1908).
- [3] Wang R., Chung B., Thomast L., Transient convective heat transfer for laminar boundary layer flow with effects of wall capacity and resistance, *J. Heat Trans.-T. ASME* 99 (1977) 513-519.
- [4] Polidori G., Lachi M., Padet J., Unsteady convective heat transfer on a semi-infinite flat surface impulsively heated, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 25 (1998) 33-42.
- [5] Padet J., Fluides en écoulement, Masson, Paris, 1991.
- [6] Padet J., Principes des transferts convectifs, Polytechnica, Paris, 1997.
- [7] Kakaç S., Yener Y., Convective heat transfer, CRC, Miami, 1995.
- [8] Cebeci T., Bradshaw P., Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, Springer Verlag, New York, 1984.
- [9] Sparrow E.M., Lin S.H., Boundary layers with prescribed heat flux. Application to simultaneous convection and radiation, *Int. J. Heat Mass Tran.* 8 (1965) 437-448.
- [10] Tchao B.T., Cheema L.S., Unsteady heat transfer in laminar boundary layer over a flat plate, *Int. J. Heat Mass Trans.* 11 (1968) 1311-1324.
- [11] Fortier A., Mécanique des fluides et transferts de chaleur et de masse par convection, Masson, Paris, 1975.
- [12] Darrozes J.-S., François C., Mécanique des fluides incompressibles, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1982.
- [13] Kays W.M., Crawford M.E., Convective Heat and Mass Transfer, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1980.

### Abridged English Version

#### Revisited results about the theory of steady laminar forced convection for 2D external boundary layer flows

This work deals with the theoretical study of forced convective heat transfer in a 2D laminar boundary layer type flow, and especially concerns semi-analytical solutions of thermal steady states, under the following basic hypotheses: fluid properties are not dependent on thermal effects and the dynamical boundary layer is assumed to be established. The two constant flux density and surface temperature situations have been examined, by means of both differential and Karman-Pohlhausen integral methods in the large Prandtl number range  $10^{-3} \leq Pr \leq 10^2$ , which covers liquid metals as well as heavy oils.

One could question the reason why such a study has been revisited because this problem seems now to be considered as well described. Two reasons have justified our interest. The first one is that there appears in the literature on the one hand, a lack of data in the whole range of fluid Prandtl numbers and on the other hand, that some published data seem to be wrong. The second reason is that the perfect knowledge of steady state solutions is of very important interest in treating transient thermophysical problems because they are no more than asymptotical solutions of unsteady problems: the initial solutions for cooling problems and the final solutions for heating ones.

The study is divided into three parts.

The aim of the first part is to summarize the results concerning the large range of Prandtl numbers above mentioned from the two mathematical approaches (differential and 4th order Karman-Pohlhausen methods). From the general steady formulations (1) and (2), the objective consists in giving the values of the fundamental parameter  $k Pr^n$  or  $Nu/Re$  with varying Prandtl

number. Firstly, from the integral approach, two distinctive cases have been examined according to the relative position of both the thermal and dynamical boundary layer. The particular case where  $\delta_T = \delta$  has been found to correspond respectively to  $Pr = 0.5$  and  $Pr = 1.0$  for constant flux and constant temperature problems. It will be noticed that the differential method gives  $Pr = 0.7$  and  $Pr = 1.0$  for these same cases. All results have been summarized in *table I* and deduced regressing laws are presented in *figure 1* and in *table II*. When one compares the two approaches, it appears that there is a good agreement between the evolutions of the  $Nu/Re$  parameter; whatever the thermal problem and the mathematical approach, the evolution of this parameter when increasing  $Pr$  is respectively proportional to  $Pr^{1/2}$ ,  $Pr^{2/5}$  and  $Pr^{1/3}$ . In the considered Prandtl number range, the average difference between the two methods is less than 5 % for the constant flux problem and about 2 % for the constant temperature one. Secondly, comparisons with literature data have been established (*table III*) when it was possible. If our results from integral method confirm the few literature data, there are differences with the 'exact' differential method. In particular one notices a difference more than 11 % with the literature data for the constant flux problem in the  $Pr$  range which covers main usual fluids.

The second part is an extension of the previous one but concerns only the integral method. Its aim is to answer the following question: when can one consider that a boundary layer type flow presents the same behaviour as a slug flow—defined by a uniform velocity profile—in identical thermal conditions? It is shown that whatever the thermophysical problem – constant

flux density or constant surface temperature – the same boundary layer thickness ratio  $\frac{\delta_T}{\delta} = 20$  traduces from a thermal viewpoint the transition of a boundary layer flow to a slug flow. In conclusion, from the same ratio  $\frac{\delta_T}{\delta} = 20$  or up to  $Pr = 5 \cdot 10^{-4}$  for the constant flux problem and  $Pr = 10^{-3}$  for the constant temperature one, the steady semi-analytical thermal response of a boundary layer type flow is the same as the fully analytical response of a slug flow (*table IV*).

The third part also concerns integral method and leads to conclusions about the choice of the polynomial order by the Pohlhausen method. If one can get

round this problem from intuitive considerations—it is known for example that a 2nd polynomial order is not satisfactory to treat a cooling problem because of the presence of a zero surface temperature gradient—, the objective of this part is to try to make a polynomial order choice from a mathematical criterion. So, the 2nd, 3rd and 4th orders have been tested and compared. It appears that only the 4th order leads to a single thermal steady state solution while the other ones generate two distinctive roots, one of them being of absolutely no significance. As such continuous thermal problems have no reason to admit two distinctive steady state solutions, a 4th order polynomial shape is advocated.

